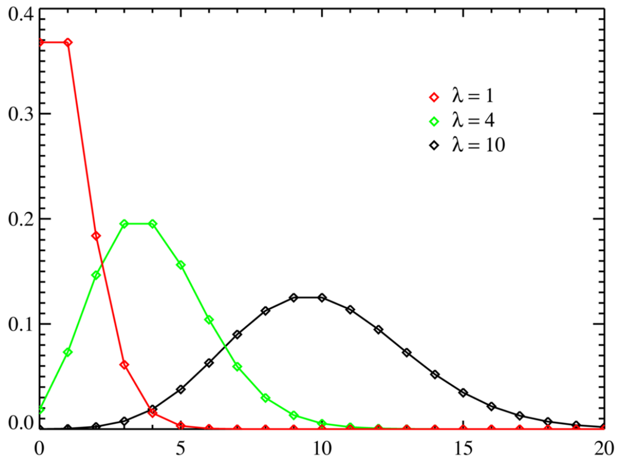
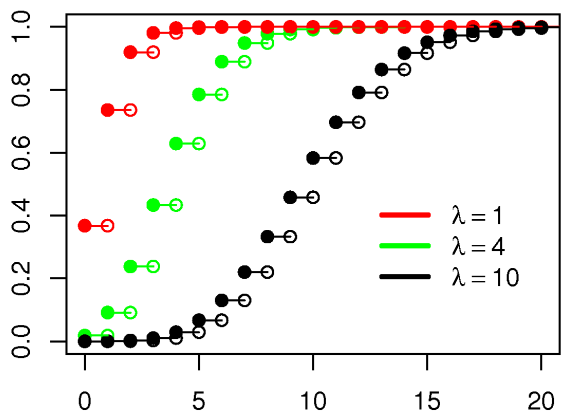
Distribución de Poisson

Distribución de Poisson	
 El eje horizontal es el índice *k*. La función solamente está definida en valores enteros de *k*. Las líneas que conectan los puntos son solo guías para el ojo y no indican continuidad. Función de probabilidad	
 El eje horizontal es el índice *k*. Función de distribución de probabilidad	
Parámetros	$\lambda \in (0, \infty)$
Dominio	$k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
Función de probabilidad (fp)	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
Función de distribución (cdf)	$\frac{\Gamma(\lfloor k+1\rfloor, \lambda)}{\lfloor k\rfloor!}$ for $k \geq 0$(dónde $\Gamma(x, y)$es la Función gamma incompleta)
Media	λ
Mediana	usualmente cerca de $\lfloor\lambda + 1/3 - 0.02/\lambda\rfloor$
Moda	$\lceil\lambda\rceil - 1$
Varianza	λ
Coeficiente de simetría	$\lambda^{-1/2}$
Curtosis	$3 + \lambda^{-1}$

Entropía	$\lambda[1-\ln(\lambda)]+e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k\ln(k!)}{k!}$
Función generadora de momentos (mgf)	$\exp(\lambda(e^t-1))$
Función característica	$\exp(\lambda(e^{it}-1))$

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución de Poisson** es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

Fue descubierta por Siméon-Denis Poisson, que la dio a conocer en 1838 en su trabajo *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile* (*Investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles*).

Propiedades

La función de masa de la distribución de Poisson es

$$f(k;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

donde

- k es el número de ocurrencias del evento o fenómeno (la función nos da la probabilidad de que el evento suceda precisamente k veces).
- λ es un parámetro positivo que representa el número de veces que se espera que ocurra el fenómeno durante un intervalo dado. Por ejemplo, si el suceso estudiado tiene lugar en promedio 4 veces por minuto y estamos interesados en la probabilidad de que ocurra k veces dentro de un intervalo de 10 minutos, usaremos un modelo de distribución de Poisson con $\lambda = 10\times4 = 40$.
- e es la base de los logaritmos naturales (e = 2,71828...)

Tanto el valor esperado como la varianza de una variable aleatoria con distribución de Poisson son iguales a λ. Los momentos de orden superior son polinomios de Touchard en λ cuyos coeficientes tienen una interpretación combinatorio. De hecho, cuando el valor esperado de la distribución de Poisson es 1, entonces según la fórmula de Dobinski, el n-ésimo momento iguala al número de particiones de tamaño n.

La moda de una variable aleatoria de distribución de Poisson con un λ no entero es igual a $\lfloor\lambda\rfloor$, el mayor de los enteros menores que λ (los símbolos $\lfloor\rfloor$ representan la función parte entera). Cuando λ es un entero positivo, las modas son λ y λ − 1.

La función generadora de momentos de la distribución de Poisson con valor esperado λ es

$$\mathrm{E}\left(e^{tX}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}f(k;\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{\lambda(e^t-1)}.$$

Las variables aleatorias de Poisson tienen la propiedad de ser infinitamente divisibles.

La divergencia Kullback-Leibler desde una variable aleatoria de Poisson de parámetro λ_0 a otra de parámetro λ es

$$D_{\mathrm{KL}}(\lambda||\lambda_0)=\lambda\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}+\frac{\lambda_0}{\lambda}\log\frac{\lambda_0}{\lambda}\right).$$

Intervalo de confianza

Un criterio fácil y rápido para calcular un intervalo de confianza aproximada de λ es propuesto por Guerriero (2012).[1] Dada una serie de eventos k (al menos el 15 - 20) en un periodo de tiempo T, los límites del intervalo de confianza para la frecuencia vienen dadas por:

$$F_{low} = (1 - \frac{1.96}{\sqrt{k-1}})\frac{k}{T}$$

$$F_{upp} = (1 + \frac{1.96}{\sqrt{k-1}})\frac{k}{T}$$

entonces los límites del parámetro λ están dadas por: $\lambda_{low} = F_{low}T; \lambda_{upp} = F_{upp}T$.

Relación con otras distribuciones

Sumas de variables aleatorias de Poisson

La suma de variables aleatorias de Poisson independientes es otra variable aleatoria de Poisson cuyo parámetro es la suma de los parámetros de las originales. Dicho de otra manera, si

$$X_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i)\,, i = 1, \ldots, N$$

son *N* variables aleatorias de Poisson independientes, entonces

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \mathrm{Poi}\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\right).$$

Distribución binomial

La distribución de Poisson es el caso límite de la distribución binomial. De hecho, si los parámetros *n* y θ de una distribución binomial tienden a infinito y a cero de manera que $\lambda = n\theta$ se mantenga constante, la distribución límite obtenida es de Poisson.

Aproximación normal

Como consecuencia del teorema central del límite, para valores grandes de λ , una variable aleatoria de Poisson *X* puede aproximarse por otra normal dado que el cociente

$$Y = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

converge a una distribución normal de media nula y varianza 1.

Distribución exponencial

Supóngase que para cada valor $t > 0$, que representa el tiempo, el número de sucesos de cierto fenómeno aleatorio sigue una distribución de Poisson de parámetro λt. Entonces, los tiempos discurridos entre dos sucesos sucesivos sigue la distribución exponencial.

Ejemplos

Si el 2% de los libros encuadernados en cierto taller tiene encuadernación defectuosa, para obtener la probabilidad de que 5 de 400 libros encuadernados en este taller tengan encuadernaciones defectuosas usamos la distribución de Poisson. En este caso concreto, *k* es 5 y, λ, el valor esperado de libros defectuosos es el 2% de 400, es decir, 8. Por lo tanto, la probabilidad buscada es

$$P(5;8) = \frac{8^5 e^{-8}}{5!} = 0,092.$$

Este problema también podría resolverse recurriendo a una distribución binomial de parámetros k = 5, n = 400 y θ =0,02.

Procesos de Poisson

La distribución de Poisson se aplica a varios fenómenos discretos de la naturaleza (esto es, aquellos fenómenos que ocurren 0, 1, 2, 3,... veces durante un periodo definido de tiempo o en un área determinada) cuando la probabilidad de ocurrencia del fenómeno es constante en el tiempo o el espacio. Ejemplos de estos eventos que pueden ser modelados por la distribución de Poisson incluyen:

- El número de autos que pasan a través de un cierto punto en una ruta (suficientemente distantes de los semáforos) durante un periodo definido de tiempo.
- El número de errores de ortografía que uno comete al escribir una única página.
- El número de llamadas telefónicas en una central telefónica por minuto.
- El número de servidores web accedidos por minuto.
- El número de animales muertos encontrados por unidad de longitud de ruta.
- El número de mutaciones de determinada cadena de ADN después de cierta cantidad de radiación.
- El número de núcleos atómicos inestables que decayeron en un determinado período
- El número de estrellas en un determinado volumen de espacio.
- La distribución de receptores visuales en la retina del ojo humano.
- La inventiva [2] de un inventor a lo largo de su carrera.

Enlaces externos

- Distribución de Poisson Puntual [3]
- Distribución de Poisson Acumulada [4]
- Calculadora Distribución de Poisson [5]
- Cálculo de la probabilidad de una distribución de Poisson [6] usando R

References

[1] Guerriero V.. « Power Law Distribution: Method of Multi-scale Inferential Statistics (http://www.sjmmf.org/download.aspx?ID=11)». *J. Mod. Math. Fr.* .

[2] http://www.leaonline.com/doi/pdfplus/10.1207/s15326934crj1103_3

[3] http://tablas-estadisticas.blogspot.com/2010/06/poisson-puntual.html

[4] http://tablas-estadisticas.blogspot.com/2010/06/poisson-acumulada.html

[5] http://www.stud.feec.vutbr.cz/~xvapen02/vypocty/po.php?language=espanol

[6] http://cajael.com/mestadisticos/T6DDiscretas/node7.php

Fuentes y contribuyentes del artículo

Distribución de Poisson *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=63039144 *Contribuyentes*: Aldo david, Alex economist, Amanuense, Camilo, Cgb, Ciberrojopower, Diegusjaimes, Faelomx, Flakinho, Ictlogist, JAGT, JakobVoss, Jkbw, Juan Mayordomo, Julian Colina, Juliowolfgang, Kved, Magister Mathematicae, Megazilla77, Mrzeon, Paintman, Pieter, Pybalo, Rufflos, Sadysamar, SuperBraulio13, Tano4595, 141 ediciones anónimas

Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes

Archivo:Poisson distribution PMF.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Poisson_distribution_PMF.png *Licencia*: Public Domain *Contribuyentes*: Autopilot, EugeneZelenko, Grafite, It Is Me Here, PAR, 1 ediciones anónimas

Archivo:PoissonCDF.png *Fuente*: http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:PoissonCDF.png *Licencia*: GNU General Public License *Contribuyentes*: Original uploader was Pdbailey at en.wikipedia

Licencia